Finalment, si considerem V un dels punts d'intersecció amb AP de la circumferència de diàmetre ST, tindrem $\widehat{SVT} = 90°$ i les rectes traçades pel punt P i paral·leles a SV i VT són dues rectes r_1 i r_2 que compleixen el que ens demanaven.

Matemots

Xavier Gràcia
Universitat Politècnica de Catalunya

Recordeu que es tracta d'un joc de llengua (vegeu l'article introductori al número 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses.

Exemple: «Regions de l'espai que omplen la benzinera» (7 lletres). La resposta és «octants», que són les regions de l'espai determinades pels plans coordenats, i que sonen igual que els octans de la gasolina.

En cas de dubte podeu trobar-ne les respostes al peu de pàgina.[3]

1. Pot ser angle, devot del deure o tram de budell (5 lletres)
2. Els nombres preferits pels fotògrafs (8 lletres)
3. Pot ser pla, conjugat i també vitamínic (7 lletres)
4. És pròpia dels cossos, però també n'hi ha de futbol i d'infanteria (7 lletres)
5. En tenen els vectors, i també els circuits electrònics (10 lletres)
6. Calcula el volum de les obres completes de Lebesgue (6 lletres)
7. El ritme més apropiat per construir un polígon de 17 costats (6 lletres)
8. Compareixença en societat d'un grup d'algebristes (11 lletres)

Tesis

- GEMMA COLLDEFORNS PAPIOL va llegir la seva tesi, dirigida per Luis Ortiz Gracia i Cornelis W. Oosterlee, titulada *Wavelet Approach in Computational Finance*, el dia 23 de febrer de 2018. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

En el món de les finances computacionals, tant els preus de derivats com la gestió de riscos han atret molt d'interès entre els professionals i l'acadèmia. La tesi proporciona tècniques basades en ondetes a fi de millorar algunes de les metodologies utilitzades en aquestes àrees. Les ondetes són famílies de funcions que es poden traslladar i dilatar arbitràriament generant bases ortogonals de $L^2(\mathbb{R})$ a partir d'una funció $\psi \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

En relació amb elles, ha sorgit una col·lecció de mètodes d'inversió de Fourier que es basen

[3] Respostes als Matemots: 5. components; 8. presentació; 1. recte; 6. mesura; 2. negatius; 7. compàs; 3. complex; 4. divisió.

en l'aproximació de funcions a partir de la projecció en la base d'ondetes, de tal manera que els coeficients de l'expansió s'expressen mitjançant la transformada de Fourier de la funció a aproximar.

El mètode SWIFT (*Shannon wavelet inverse Fourier technique*) per valorar opcions d'estil europeu en un subjacent s'ha publicat i presentat recentment com una tècnica precisa, robusta i altament eficient basada en les ondetes de Shannon. Motivats per la valoració d'un tipus d'opcions exòtiques anomenades «opcions arc iris», que depenen de diversos actius, un dels objectius de la tesi és l'extensió multidimensional del mètode SWIFT [1]. Gràcies a la naturalesa de les ondetes de Shannon, no és necessari un truncament a priori del rang d'integració, es té una estimació de l'error i es fa ús d'algorismes de la transformada ràpida de Fourier per accelerar els càlculs.

En l'àmbit de gestió de risc, són els reguladors els que s'encarreguen de determinar la quantitat de capital que les entitats financeres han de guardar per estar preparades per suportar pèrdues inesperades. És l'anomenat «comitè de Basilea» el que s'encarrega dels reguladors bancaris mundials. Recentment, el comitè ha revisat els estàndards establerts pel capital mínim per risc de mercat i, entre altres canvis, suggereix, d'una banda, moure l'ús estès de la mesura de risc VaR cap a la mesura ES, i, l'altra banda, considerar la incorporació del risc derivat a causa de la no-liquiditat del mercat. És per això que un segon objectiu de la tesi és presentar un nou mètode numèric basat en SWIFT per als càlculs del VaR i l'ES amb un horitzó de temps estocàstic per tenir en compte els problemes de liquiditat del mercat [2].

El risc de crèdit és el risc de pèrdues per part del deutor en cas que no compleixi els acords i en general és la principal font de risc en un banc comercial. En la tesi, s'investiga el problema de calcular les mesures de risc de crèdit de les carteres sota els models multifactorials gaussians i de t-còpula. És ben sabut que els mètodes de Montecarlo, que són els que generalment s'empren, són molt exigents des del punt de vista computacional en aquestes situacions. Per millorar aquests problemes, en la tesi es presenten tècniques numèriques eficients i robustes basades en les ondetes de Haar per recuperar la funció de distribució acumulada de la variable de pèrdues a partir de la seva funció característica [3].

Referències

[1] G. Colldeforns-Papiol, L. Ortiz-Gracia i C.W. Oosterlee, «Two-dimensional Shannon wavelet inverse Fourier technique for pricing European options». *Appl. Numer. Math.* **117** (2017), 115–138.

[2] G. Colldeforns-Papiol i L. Ortiz-Gracia, «Computation of market risk measures with stochastic liquidity horizon». *J. Comput. Appl. Math.* **342** (2018), 431–450.

[3] G. Colldeforns-Papiol, L. Ortiz-Gracia i C.W. Oosterlee, «Quantifying credit portfolio losses under multi-factor models». *Int. J. Comput. Math.* **0** (2018), 1–22.

- ALBERTO DEBERNARDI PINOS va llegir la seva tesi, dirigida per Sergey Tikhonov, titulada *Convergència i integrabilitat de transformades de Fourier*, el dia 12 de març de 2018. La tesi correspon al Centre de Recerca Matemàtica i al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

En aquesta tesi principalment s'estudien dos problemes de les transformades integrals

$$Tf(y) = \int_0^\infty K(x,y)f(x)\,dx, \quad y \in (0,\infty),$$

on K és un nucli de tipus Fourier: la convergència uniforme i la seva integrabilitat. En gran part de la tesi una de les hipòtesis centrals és la de monotonia general.

Les funcions monòtones generals [11, 13] definides a $(0,\infty)$ són aquelles funcions localment integrables i localment de variació afitada per a

les quals existeixen constants $C, \lambda > 1$ tals que

$$\int_x^{2x} |f'(t)|\,dt \le C \int_{x/\lambda}^{\lambda x} \frac{|f(t)|}{t}\,dt,$$

per a tot $x > 0$ (aquesta definició es pot estendre de diverses maneres a subconjunts de $\mathbb{R}^n$, i inclús generalitzar a $(0,\infty)$, tal com es fa a[5, 7]). La motivació darrere la condició de monotonia general és que les funcions monòtones (decreixents) satisfan les desigualtats

$$\int_x^{2x} |f'(t)|\,dt \le f(x) \le 2\int_{x/2}^{x} \frac{|f(t)|}{t}\,dt,$$

amb la qual cosa es pot esperar que les funcions monòtones generals puguin reemplaçar les funcions decreixents en una gran quantitat de resultats. De fet, aquesta generalització comprèn una varietat de funcions molt més àmplia que només les funcions decreixents. Per exemple, qualsevol funció $f(x) = x^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$, és monòtona general. Una altra observació interessant és que en la definició estem considerant implícitament funcions a valors complexos, mentre que les funcions decreixents són típicament positives.

Donada una transformada T és important tenir eines per decidir si les integrals parcials $T_N f(y) = \int_0^N K(x,y) f(x)\,dx$ convergeixen de manera uniforme cap a la funció $Tf(y)$, ja que en cas afirmatiu, aquesta última funció conservaria propietats desitjables de les funcions $T_N f(y)$, com ara la continuitat o la integrabilitat. A més, el fet que a les transformades de tipus Fourier els nuclis $K(x,y)$ són típicament oscil·latoris fa que en el cas general sigui més aviat difícil donar condicions suficients per a la convergència uniforme de $T_N f(y)$, a part de les condicions trivials. Per exemple, en el cas general la transformada del sinus

$$\int_0^\infty f(x) \sin xy\,dx$$

convergeix uniformement si $f \in L^1(1,\infty)$ i $xf(x) \in L^1(0,1)$, però la condició $f \in L^1(1,\infty)$ és massa restrictiva (i, de fet, és una condició suficient trivial). En canvi, si suposem que f és monòtona general (seguint la idea de [1] per a sèries de Fourier amb coeficients decreixents), aquesta hipòtesi pot ser relaxada tal com es fa a[7], on es demostra que la condició $f \in L^1(1,\infty)$ es pot substituir per $xf(x) \to 0$ quan $x \to \infty$, cosa que en general no és certa. De fet, en el cas de funcions monòtones generals la condició $xf(x) \to 0$ quan $x \to \infty$ és més feble que $f \in L^1(1,\infty)$.

Una altra família de transformades per a les quals hem obtingut condicions necessàries i suficients per a la seva convergència uniforme són les transformades de Hankel amb pesos potencials [2, 4, 6]

$$\mathcal{L}^\alpha_{\mu,\nu} f(r) = r^\mu \int_0^\infty (rx)^\nu f(x) j_\alpha(rx)\,dx,$$

on j_α és la funció de Bessel normalitzada d'ordre $\alpha \ge -1/2$. L'interès en l'estudi d'aquesta família de transformades resideix en el fet que moltes transformades clàssiques es poden representar mitjançant un operador $\mathcal{L}^\alpha_{\mu,\nu} f(r)$, com ara la transformada del sinus o cosinus, o la transformada de Fourier de funcions radials en $\mathbb{R}^n$.

Finalment, s'estudien desigualtats de normes [8]

$$\|Tf\|_{L^q(u)} \le C\|f\|_{L^p(v)} \tag{2}$$

en espais de Lebesgue amb pesos $L^p(v)$, $L^q(u)$, on la constant C és independent de f. Concretament, per a les transformades de tipus Fourier [10] trobem condicions necessàries o suficients en els pesos u i v per tal que la desigualtat (2) es compleixi per a tota $f \in L^p(v)$, mitjançant les desigualtats de Hardy. Per a funcions monòtones generals les condicions que garanteixen (2) es poden relaxar, i, de fet, utilitzant la mateixa tècnica que a [6], que consta en trobar fites superiors per a la funció primitiva del nucli $K(x,y)$ (com a funció de x, i amb constant additiva nul·la), es troben les condicions necessàries i suficients per tal que la desigualtat (2) es compleixi quan u i v són pesos potencials, i així s'unifiquen així els resultats de diversos articles, com ara [3, 9], i [12], i se'n troben de nous per a transformades amb nuclis oscil·latoris.

Referències

[1] T. W. Chaundy i A. E. Jolliffe, «The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series». *Proc. London Math. Soc.* S2-15 (1916), núm. 1, 214–216.

[2] L. De Carli, «On the L^p-L^q norm of the Hankel transform and related operators». *J. Math. Anal. Appl.* 348 (2008), 366–382.

[3] L. De Carli, D. Gorbachev i S. Tikhonov, «Pitt and Boas inequalities for Fourier and Hankel transforms». *J. Math. Anal. Appl.* 408 (2013), núm. 2, 762–774.

[4] A. Debernardi, «Hankel transforms of general monotone functions», acceptat.

[5] A. Debernardi, «Uniform convergence of double sine transforms of general monotone functions». *Anal. Math.* 43 (2017), núm. 2, 193–217.

[6] A. Debernardi, «Uniform convergence of Hankel transforms». *J. Math. Anal. Appl.* 468 (2018), núm. 2, 1179–1206.

[7] A. Debernardi, «Uniform convergence of sine integrals with general monotone functions». *Math. Nachr.* 290 (2017), núm. 17-18, 2815–2825.

[8] A. Debernardi, «Weighted norm inequalities for generalized Fourier-type transforms and applications». enviat.

[9] D. Gorbachev, E. Liflyand i S. Tikhonov, «Weighted Fourier inequalities: Boas' conjecture in $\mathbb{R}^n$». *J. Anal. Math.* 114 (2011), 99–120.

[10] D. Gorbachev, E. Liflyand i S. Tikhonov, «Weighted Pitt inequalities for integral transforms», acceptat a Indiana Univ. Math., preimpressió a `https://pdfs.semanticscholar.org/e419/69b76bc7a287fbab6c0fa0d48f64d2377dfa.pdf`.

[11] E. Liflyand i S. Tikhonov, «A concept of general monotonicity and applications». *Math. Nachr.* 284 (2011), núm. 8-9, 1083–1098.

[12] E. Liflyand i S. Tikhonov, «Extended solution of Boas' conjecture on Fourier transforms». *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 346 (2008), núm. 21-22, 1137–1142.

[13] S. Tikhonov, «Trigonometric series with general monotone coefficients». *J. Math. Anal. Appl.* 326 (2007), 721–735.

- CARLES BARRIL BASIL va llegir la seva tesi, dirigida per Àngel Calsina Ballesta, titulada *Semilinear hyperbolic equations and the dynamics of gut bacteria*, el dia 13 de juny de 2018. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

El problema que es tracta en aquesta tesi sorgeix d'una sèrie d'experiments realitzats per la Montserrat Llagostera i el seu equip de la Universitat Autònoma de Barcelona. Estudien l'ús de bacteriòfags per tractar la salmonel·la en pollets [2] i, en aquest sentit, estan especialment interessades a determinar com la salmonel·la es propaga i persisteix en una població donada, i com els bacteriòfags poden afectar aquests processos. Una de les qüestions que els preocupava especialment era l'efecte que tenia la contaminació del medi amb bacteris excretats pels pollets infectats.

Per abordar aquesta qüestió vam partir d'un model en el qual es considera la dinàmica dels bacteris tant al medi com al llarg de l'intestí dels animals. A més a més, s'assumeix també que els bacteris de l'intestí poden trobar-se en dos estats diferents: com a partícules lliures o com a partícules adherides a l'epiteli, de manera que les primeres es veuran afectades pel flux intestinal i les segones no. Matemàticament, les condicions anteriors per una població de n animals queden reflectides en el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} \partial_t u_h = \gamma_1^h(u_h)u_h + \alpha_h v_h - \delta_h u_h \\ \partial_t v_h = -c_h \partial_x v_h + \gamma_2^h(v_h)v_h - \alpha_h v_h + \delta_h u_h \\ \dot{r} = \sum_{h\in H}(c_h v_h(l_h,t) - \lambda_h r) - \mu r \\ c_h v_h(0,t) = \lambda_h r\,, \end{cases}$$

on $h \in \{1,\dots,n\}$ és un índex per als diferents hostes. Les variables dependents són, d'una

banda, $u_h(x,t)$ i $v_h(x,t)$ que representen, respectivament, els bacteris adherits i lliures que es troben a la posició x de l'hoste h a l'instant t, i, de l'altra, $r(t)$ que és la concentració de bacteris al medi a l'instant t. La resta de paràmetres de cada hoste h són: la longitud de l'intestí l_h, la velocitat del flux intestinal c_h, les taxes d'adhesió α_h i de despreniment δ_h per càpita, la taxa d'ingestió λ_h i les funcions γ_1^h i γ_2^h que donen les taxes de creixement per càpita segons la fase en la qual es trobi el bacteri, que assumim que són diferenciables. Finalment, el paràmetre μ indica la taxa de degradació dels bacteris que es troben al medi. Observem que la condició de frontera indica que la densitat de bacteris a l'inici de l'intestí ve donada per la quantitat de bacteris que l'animal ha ingerit del medi.

Per determinar si el problema està ben plantejat, és a dir, si per cada condició inicial de les variables dependents hi ha una i només una trajectòria que satisfà les equacions en «algun sentit» i que, a més a més, les trajectòries es comporten de manera contínua respecte a les condicions inicials, utilitzem la teoria de semigrups i, en particular, la formulació semilineal [3]. En concret, reescrivim el problema de valor inicial associat al sistema anterior en la forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = A_T x(t) + \mathcal{H}(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in X\,, \end{cases}$$

on X és un espai de Banach apropiat on prenen valors les variables dependents. L'operador A_T, qué és lineal però no necessàriament continu, és el generador d'un semigrup T fortament continu en X. En canvi, la pertorbació $\mathcal{H}$ és no lineal però més regular: Lipschitz si es vol provar existència i unicitat de solucions, diferenciable si es vol provar el principi d'estabilitat lineal.

Quan s'intenta reescriure el problema d'aquesta forma, ens trobem amb algun obstacle que ens impedeix aplicar la formulació semilineal. En efecte, si prenem X com l'espai de funcions integrables aleshores la pertorbació $\mathcal{H}$ no és diferenciable en general, de manera que no podem analitzar l'estabilitat d'equilibris utilitzant el principi d'estabilitat lineal. Si, en canvi, prenem X com l'espai de funcions contínues que satisfan la condició de frontera, aleshores la pertorbació $\mathcal{H}$ sí que és diferenciable però el seu recorregut se «surt» de l'espai X, de manera que no és possible aplicar la formulació semilineal. Per resoldre aquest inconvenient hem utilitzat una generalització de la teoria semilineal desenvolupada a [4, 5] en la qual s'admeten pertorbacions $\mathcal{H}$ que donen valors a certa extensió de X determinada pel semigrup T.

Referències

[1] J. Cerdà, J. Martín i P. Silvestre, «Capacitary function spaces». *Collectanea Math.* 62 (2011), núm. 1, 95–118.

[2] J. Colom, M. Cano-Sarabia, J. Otero, P. Cortés, D. Maspoch i M. Llagostera. «Liposome-Encapsulated Bacteriophages for Enhanced Oral Phage Therapy against Salmonella spp.». *Applied and Environmental Microbiology*, 81 (2015), núm. 14, 4841–4849.

[3] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, (1983).

[4] Ph Clément, O. Diekmann, M. Gyllenberg, H.J. a. M. Heijmans i H.R. Thieme. «Perturbation theory for dual semigroups». *Mathematische Annalen*, 277 (1987), núm 4, 709–725.

[5] Ph. Clément, O. Diekmann, M. Gyllenberg, H. Heijmans i H. R. Thieme. «Perturbation theory for dual semigroups. III. Nonlinear Lipschitz continuous perturbations in the sun-reflexive case». *Pitman Research Notes in Mathematics*, (1989).

- JORDI DELGADO RODRÍGUEZ va llegir la seva tesi, dirigida per Enric Ventura Capell, titulada *Extensions of free groups: algebraic, geometric, and algorithmic aspects*, el dia 15 de setembre de 2017. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Politècnica de Catalunya.

En aquest treball s'usen tècniques geomètriques per estudiar certes extensions naturals dels grups lliures i resoldre diversos problemes algorísmics sobre elles.

A aquest efecte, es considera la família de grups lliure-abelians per lliure ($\mathbb{Z}^m \times \mathbb{F}_n$) com a punt de partida per trobar generalitzacions en dues direccions principals: productes semidirectes, i grups parcialment commutatius (PC-groups).

Els quatre projectes constituents d'aquesta tesi es descriuen a continuació.

Productes directes de grups lliure-abelians per lliure [1, 2]**.** Comencem estudiant l'estructura dels grups $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{F}_n$, amb especial èmfasi en el seu reticle de subgrups i el seu monoide d'endomorfismes, per als quals dona una descripció explícita i es caracteritzen tant la injectivitat com l'exhaustivitat.

A continuació, es parteix dels resultats obtinguts per atacar diversos problemes algorísmics involucrant tant subgrups com endomorfismes de $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{F}_n$. En concret, es demostra la resolubilitat algorísmica del problema de la pertinença de subgrups (MP), el problema de l'índex finit (FIP), el problema de la intersecció de subgrups (SIP), el problema de la intersecció de classes laterals (CIP), el problema dels punts fixos (FPP), els problemes de Whitehead (WhP) i el problema de la conjugació torçada (TCP), per a aquesta família de grups.

Reconeixement algorísmic d'extensions cícliques [3]**.** A la primera part, es demostra la indecidibilitat algorísmica de diverses propietats (com ara generabilitat finita, presentabilitat finita, abelianitat, finitud, llibertat i trivialitat) del grup base de les extensions cícliques finitament presentades. En particular, veiem que no és possible decidir algorísmicament si una extensió finitament presentada $G \rtimes \mathbb{Z}$ admet un grup base finitament generat. Aquest últim resultat ens permet demostrar també la indecidibilitat algorísmica de l'invariant de Bieri-Neumann-Strebel (BNS), un important invariant geomètric històricament considerat «molt difícil de calcular en general».

A la segona part, es demostra l'equivalència entre el problema de l'isomorfisme (IP) dins de la subclasse de $\mathbb{Z}$-extensions úniques, i el problema de la semiconjugació ($\frac{1}{2}$CP) per a cert tipus d'automorfismes exteriors, que caracteritzem algorísmicament.

Autòmats de Stallings per a grups lliure-abelians per lliure [4]**.** Després de recrear en un llenguatge purament algorísmic la teoria clàssica de Stallings associant un autòmat a cada subgrup del grup lliure $\mathbb{F}_n$, estenem aquesta teoria a productes semidirectes de la forma $\mathbb{Z}^m \rtimes \mathbb{F}_n$. Concretament, associem un autòmat (enriquit amb vectors de $\mathbb{Z}^m$) a cada subgrup de $\mathbb{Z}^m \rtimes \mathbb{F}_n$ i demostrem que en el cas de subgrups finitament generats aquesta construcció és algorísmica i permet resoldre el problema de la pertinença (MP) dins d'aquesta família de grups.

La descripció geomètrica obtinguda mostra, a més (fins i tot en el cas de productes directes), no només que la intersecció de subgrups finitament generats pot ser infinitament generada, sinó que, també quan és finitament generada, no es pot afitar el rang de la intersecció en termes dels rangs dels subgrups intersecats. Aquest fet és rellevant perquè denega qualsevol possible extensió de la cèlebre (i recentment provada) conjectura de Hanna Neumann en aquest àmbit.

Problemes de la intersecció per a grups de Droms [5, 6]**.** Després de caracteritzar els grups parcialment commutatius (PC-*groups*) que satisfan la propietat de Howson [5], combinem la versió algorísmica del teorema dels subgrups de Kurosh donada per S.V. Ivanov, amb idees del nostre treball a [1] sobre $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{F}_n$, per demostrar la resolubilitat del problema de la intersecció de subgrups (SIP), el problema

de la intersecció de classes laterals (CIP), i altres problemes afins, dins la subfamília de PC-*groups* de Droms (com ara aquells PC-*groups* en que tots els subgrups són de nou parcialment commutatius).

Referències

[1] J. Delgado i E. Ventura, «Algorithmic problems for free-abelian times free groups». *Journal of Algebra*. 391 (2013), 256–283.

[2] J. Delgado, «Whitehead Problems for Words in free times free-abelian groups», *Extended Abstracts Fall 2012*, ser. Trends in Mathematics, J. González-Meneses, M. Lustig, and E. Ventura, Eds. Springer International Publishing, Jan. 2014, 35–38.

[3] B. Cavallo, J. Delgado, D. Kahrobaei i E. Ventura, «Algorithmic recognition of infinite cyclic extensions». *Journal of Pure and Applied Algebra* 221 (2017), núm. 9, 2157–2179.

[4] J. Delgado i E. Ventura, «Stallings automata for free-abelian by free groups» (en premsa), 2017.

[5] J. Delgado, «Some characterizations of Howson PC-groups». *Reports@SCM* 1 (2014), núm. 1, 33–38.

[6] J. Delgado, E. Ventura i A. Zakharov, «Intersection problem for Droms RAAGs». *International Journal of Algebra and Computation*, Jul. 2018.